Φυσική σημασία

(a) Για να περιστρέψουμε ένα μηχανικό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω, χρειαζόμαστε ενέργεια $E = \frac{1}{2} I \omega^2$

(b) Το ίδιο ποσό ενέργειας, χρειάζεται να καταναλώσουμε προκειμένου να σταματήσουμε έναν άξονα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

(c) Η ροπή αδράνειας είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας $\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} m u^2 \\ E_n = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{cases}$, εμπεριέχει όμως πληροφορία όχι μόνο για τη μάζα του σώματος, αλλά και για τον τρόπο κατανομής της.

Ορίζουμε ροπές αδράνειας ή δεύτερες ροπές ως προς τον άξονα x

$$I_x = \iint_R y^2 \rho \, dA$$

άξονα y

$$I_y = \iint_R x^2 \rho \, dA$$

αρχή των αξόνων:

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho \, dA = I_x + I_y$$

Γενικότερα ορίζουμε τη δεύτερη ροπή ως προς μια ευθεία, L, $I_L = \iint_R r^2(x,y) \rho \, dA$, όπου $r = r(x,y)$ η απόσταση του (x,y) από την L.

Η σχέση $I_0 = I_x + I_y$ συνήθως καλείται "Θεώρημα καθέτων αξόνων".

Βάσει των ροπών αδράνειας, ορίζουμε τις ακτίνες αδράνειας, ώστε

$$\begin{cases} I_x = mR_x^2 \\ I_y = mR_y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \\ R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \end{cases}$$

Οι ποσότητες αυτές μας λένε σε πόση απόσταση από τους αντίστοιχους άξονες, θα μπορούσαμε να συγκεντρώσουμε όλη τη μάζα του σώματος ώστε να έχουμε την ίδια ροπή αδράνειας. Δηλαδή αντιστοιχούμε ολόκληρο το σώμα σε ένα υλικό σημείο.

Παράδειγμα Να βρεθούν το κ.μ και οι ροπές αδράνειας του τριγώνου, με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$.

• Η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις.

Η φυσική σημασία των ποσοτήτων που έχουμε ορίσει, παραμένει ακριβώς ίδια. Τα διπλά πλέον ολοκληρώματα και στοιχειώδη εμβαδά αντικαθίστανται από τριπλά ολοκληρώματα και στοιχειώδεις όγκους.

Είναι:

$$\text{Όγκος} := V = \iiint_D dV$$

$$\text{Μάζα} := m = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV$$

Πρώτες ροπές και κέντρο μάζας

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho\, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\rho\, dV, \quad M_{xy} = \iiint_D z\rho\, dV$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

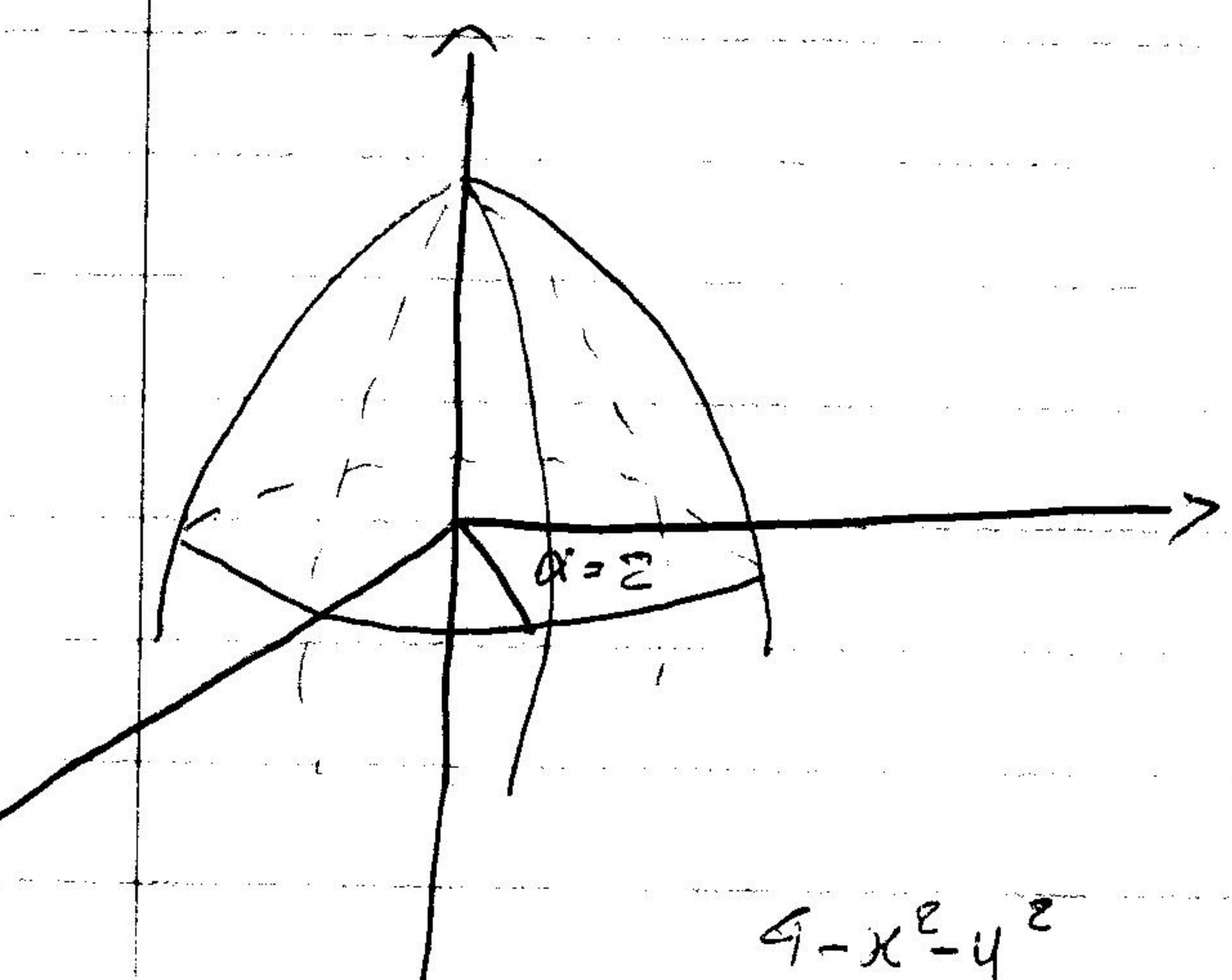
Ροπές αδράνειας (δεύτερες ροπές)

$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\,\rho\, dV$, $I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\,\rho\, dV$,

$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\,\rho\, dV$, $I_L = \iiint_D r^2 \rho\, dV$ όπου r η απόσταση του (x,y,z) από την ευθεία L.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που έχουμε μονοδιάστατες κατανομές μάζας, π.χ. σύρματα, νήματα, ράβδους, τα ολοκληρώματα αντικαθίστανται από επικαμπύλια ολοκληρώματα.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί το κεντροειδές στερεού που φράσσεται από τον κυκλικό δίσκο $\{x^2+y^2 \le 4,\ z=0\}$, $z = 4-x^2-y^2$.



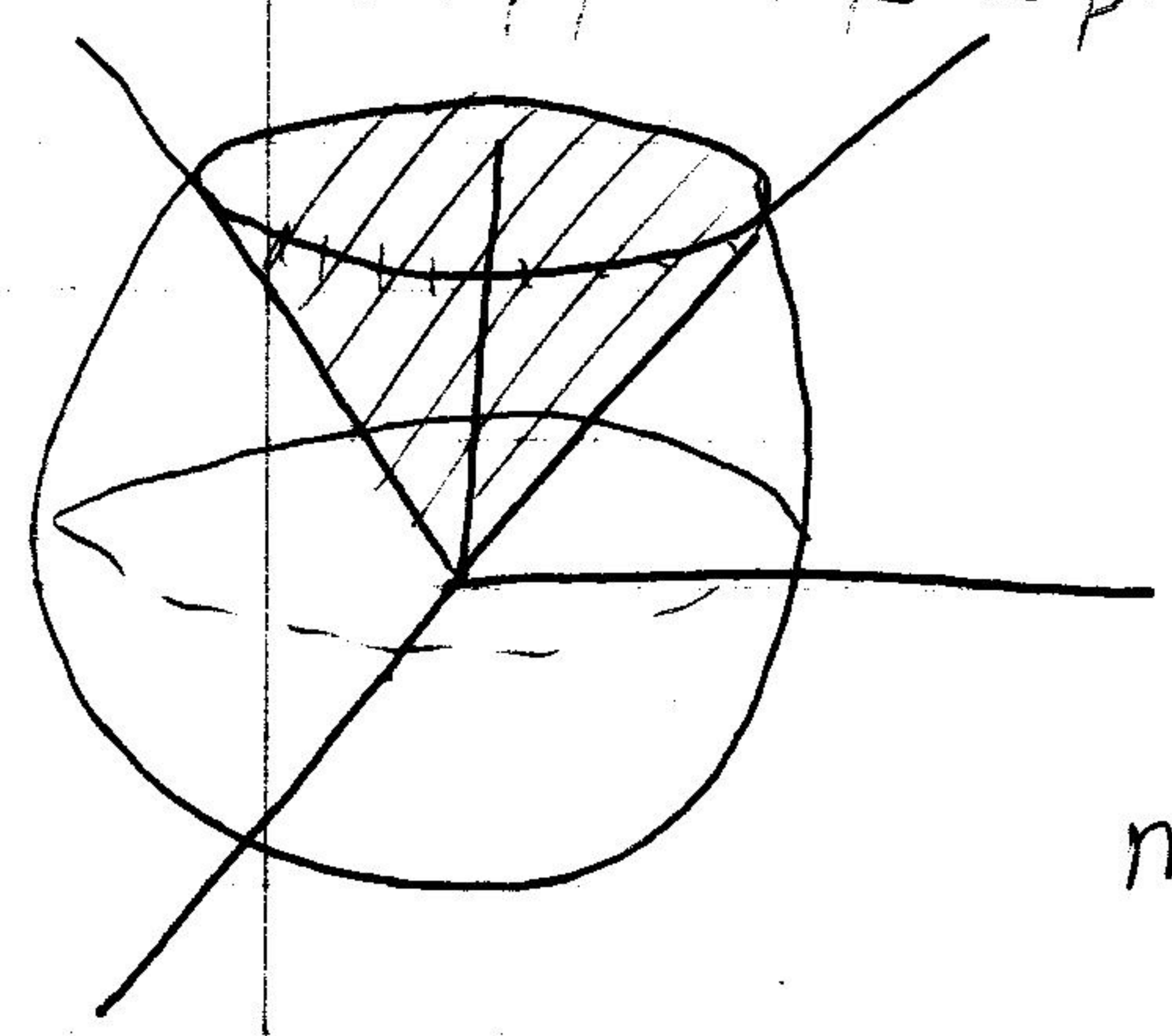
πυκνότητα σταθερή.

$$m = \iiint_D \rho\, dV = \rho \iiint_D dV$$

$$= \rho \iint \int_0^{4-x^2-y^2} dz\, dA = \rho \iint (4-x^2-y^2)\, dA$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta = 8\pi\rho \text{ μονάδες μάζας}$$

Να βρεθεί το κ.μ. από ένα παγωτό χωνάκι.

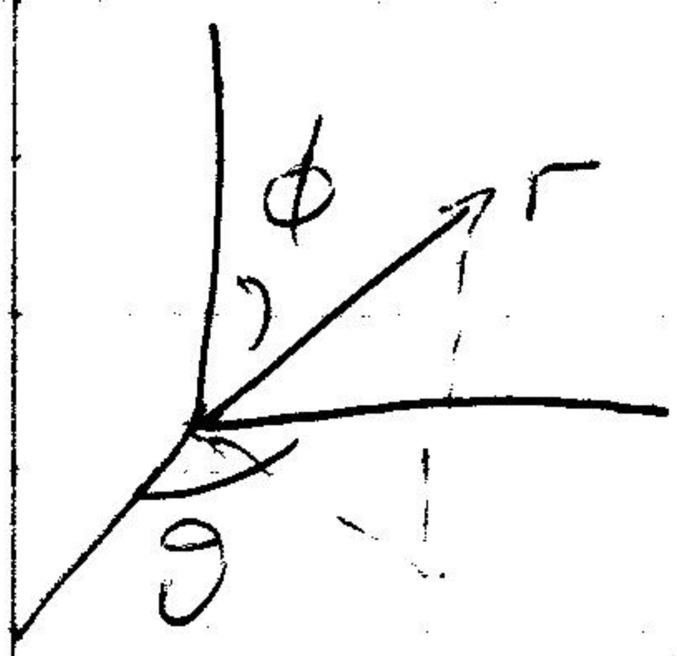


Μοναδιαία σφαίρα και κώνος $\phi = \frac{\pi}{3}$

σταθερή πυκνότητα $\dot{\rho}$

$$m = \dot{\rho} \iiint_D dV$$

Σφαιρικές συν/νες $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$, όπου



, με $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.

, με $\dot{\rho} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{1} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{\pi\dot{\rho}}{3}$

Άσκηση: Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς z ενός στερεού μοναδιαίας πυκνότητας που περικλείεται από την επιφάνεια $r = 1 - \cos\phi$.